

Level Set 方法在非结构网格上的应用^{*}

张 军^{1**} 赵 宁¹ 谭俊杰² 任登凤² 王莎莎²

1. 南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016;

2. 南京理工大学动力工程学院, 南京 210094

摘要 采用基于非结构网格的 Level Set 方法对多介质流动问题进行数值模拟. 采用有限体积法求解 Euler 方程, 控制面通量的计算采用 HLLC (Harten, Lax, van Leer, Contact) 近似 Riemann 解方法. Level Set 方程也采用有限体积法求解, 采用 Lax-Friedrichs 方法计算通量, 通过窄带 (Narrow Band) 方法来减少计算量, 重新初始化采用 Fast Marching Method. 界面的处理采用 Ghost Fluid 方法. Runge-Kutta 显式时间推进, 时间、空间都是二阶精度. 对 SOD 激波管问题进行数值模拟, 其结果和精确解相吻合; 对空气/氮气泡相互作用问题进行模拟, 取得较好的结果.

关键词 多介质 Level Set 方法 非结构网格 窄带方法 快速推进方法

多介质流体运动界面的数值模拟已经成为计算流体力学的研究热点之一, 它涉及到很多重要的工程技术领域和学科. 目前对含多介质运动界面流场进行数值模拟的方法主要分为两大类, 即界面追踪方法^[1] (front tracking method) 和界面捕捉方法 (front capturing method), 两类方法各有其特点.

界面追踪方法的主要特点是: 能够保持间断的准确和锐利; 为了避免 CFL 条件难以满足的“小网格”问题, 需要对网格进行合并、细化和重分等处理; 该方法难于处理界面拓扑结构变化的情况; 当推广到多维问题时, 交界面的重构变得非常复杂; 该方法在间断处对流体状态变量进行单侧光滑外推, 采用不同的数值通量进行计算, 不可避免的会引入守恒性误差.

界面捕捉方法主要有 Level Set 方法, 体积分数 (VOF) 法等. Level Set 方法由 Osher 等提出^[2], Level Set 方法的基本思想是用 LS (Level Set) 函数跟踪界面, 一般情况下界面沿着法向速度是变化的, 在初始时刻 LS 函数为距离函数的情况下, 经过有限的时间步后, 其梯度可能变得剧烈或者平

缓, 等值线出现聚合和拉伸的情况, LS 函数将不再保持距离函数的性质, 这时就需要对 LS 函数进行重新初始化, 使其保持距离函数的性质. Level Set 方法有着简捷通用, 易于处理拓扑结构变化等诸多的优点, 得到广泛的应用. 近年来, 国内外很多文献对 Level Set 方法的应用^[3-5] 进行研究, 取得很多重要的成果. 但是由于 Level Set 方法本身还存在一些急待解决的问题, 如难于应用于具有复杂外形工程问题等, 所以 Level Set 方法仍然是目前计算流体力学领域的研究热点.

目前对 Level Set 方法的研究, 大部分基于结构网格^[4], 采用有限差分方法. 基于非结构网格的 Level Set 方法的研究还不是很充分. 非结构网格有着灵活、易于处理复杂计算区域、易于自适应等优点, 近年来得到广泛的关注. 因此, 对基于非结构网格的 Level Set 方法进行研究是很有必要的^[5].

本文对 Level Set 方法在非结构网格上的应用进行研究. 采用有限体积方法求解 Euler 方程和 Level Set 方程, Runge-Kutta 显式时间推进, 时间、空间都是二阶精度. 对 SOD 激波管问题、空

2007-04-05 收稿, 2007-05-16 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 10576015)和计算物理重点实验室基金资助项目

** E-mail: zhangjunrdf@nuaa.edu.cn

©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

气/氦气泡相互作用等问题进行数值模拟, 取得较好的结果.

1 控制方程

流动控制方程为 Euler 方程, 可以采用积分形式表示, 如方程(1)所示

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV + \int_{\partial V} \mathbf{F} dA = 0 \quad (1)$$

(1)式中, V 是控制体体积, ∂V 是它的边界, 守恒型变量 $\mathbf{U}$ 和无粘矢量通量 $\mathbf{F}$ 定义如(2)式所示

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n u + p n_x \\ \rho u_n v + p n_y \\ (\rho E + p) u_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

(2)式中, ρ , p , E 分别表示流体密度、压强、比总内能, u , v 分别表示速度矢量的两个分量, n 表示边界 ∂V 的单位外法线方向, n_x , n_y 是 n 的两个分量. u_n 的定义如(3)式所示

$$u_n = u n_x + v n_y \quad (3)$$

比内能 e 和比总内能 E 的关系如(4)式所示

$$E = e + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (4)$$

Stiffen 气体状态方程为

$$p = p(\rho, e) = (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) - P_c \right] - P_c \quad (5)$$

熵 s 和声速 c 的关系如下

$$c^2 = \frac{dp(\rho, s)}{d\rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{p}{\rho^2} + \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{p + P_c}{\rho} \quad (6)$$

2 Level Set 方法

采用 Level Set 方法来捕捉界面, Level Set 函数 ϕ 是距离函数, 其零值标志界面所在的位置, 其

正、负值分别代表某种流体, 每一种流体都满足 Euler 方程. Level Set 方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F_N(\mathbf{x}, \nabla \phi, \kappa) |\nabla \phi| = 0 \quad (7)$$

(7)式中, F_N 是界面的法向速度, ϕ 是距离函数, $\nabla \phi$ 是距离函数的梯度, κ 是界面的平均曲率. 方程(7)可以简化为下面的 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H(\mathbf{x}, \nabla \phi) = 0 \quad (8)$$

对于任意一个控制体, 方程(8)可以采用有限体积法离散成下面的形式^[6]

$$V \frac{d\phi_x}{dt} + \sum_{k=1}^{k=ne} H_{1k} S_k = 0 \quad (9)$$

$$V \frac{d\phi_y}{dt} + \sum_{k=1}^{k=ne} H_{2k} S_k = 0 \quad (10)$$

(9), (10)式中, V 是控制体的体积, k 表示单元的第 k 个面, ne 是控制体的总面数, S_k 是第 k 个面的面积.

通量 H 的计算采用 Lax-Friedrichs 方法. 对于任意一条边, 假设其左边的值为 (ϕ_x^-, ϕ_y^-) , 右边的值为 (ϕ_x^+, ϕ_y^+) , Lax-Friedrichs 通量按照下面的公式计算.

$$H_{1k}(\phi_x^+, \phi_x^-, \phi_y^+, \phi_y^-) = \frac{1}{2} [H(\phi_x^+, \phi_y^+) + H(\phi_x^-, \phi_y^-)] \cdot n_x - \frac{1}{2} \alpha (\phi_x^+ - \phi_x^-) \quad (11)$$

$$H_{2k}(\phi_x^+, \phi_x^-, \phi_y^+, \phi_y^-) = \frac{1}{2} [H(\phi_x^+, \phi_y^+) + H(\phi_x^-, \phi_y^-)] \cdot n_y - \frac{1}{2} \beta (\phi_y^+ - \phi_y^-) \quad (12)$$

$$\alpha = \max_{\phi_x^-, \phi_y^-} \left| \frac{\partial H(\phi_x, \phi_y)}{\partial \phi_x} \right|, \quad \beta = \max_{\phi_x^-, \phi_y^-} \left| \frac{\partial H(\phi_x, \phi_y)}{\partial \phi_y} \right| \quad (13)$$

为了保持 Level Set 函数 ϕ 在界面附近始终为距离函数, 必须对其进行重新初始化, 重新初始化的方程为:

$$|\nabla\phi|=1 \quad (14)$$

3 数值计算方法

由于界面隐含为场函数的零等值面, 一般只需要求解场函数在界面周围区域中的网格单元值, 距离较远的网格单元对计算结果的影响可以忽略不计, 窄带法将方程的求解区域限定在界面周围的窄带内, 大大减小了计算量. 一般情况下, 在界面的每一侧, 取宽度大概是 6 到 12 个网格单元, 可以获得较好的计算结果. 本文采用窄带方法^[7]局部求解 Level Set 方程.

采用 fast marching method (FMM) 方法进行重新初始化^[4]. 其基本思想是按照逆风的方式推进阵面, 这就意味着方程(14)的解沿着一个方向. 因此首先考虑界面两侧带状区域单元的集合, 用迭代法求解方程, 并以最小的 ϕ 值建立方程的解. 然后把求得的最小 ϕ 值作为可接受的 ϕ 值, 把此单元从集合中移走, 将新单元加入到推进面附近带状区域的集合中, 并向前推进阵面直至无新单元加入. 重新初始化分别在界面的左右两侧进行, 即 $\phi < 0$ 或者 $\phi > 0$. 为了提高计算效率, 在编制程序时采用“堆排序”技术(即二叉树数据结构).

对于窄带中的单元, 通过逐个单元的迭代(求解方程(14))完成距离函数的重新初始化. 迭代从具有最小距离函数 ϕ 的单元开始, 一直到所有的窄带单元计算结束. 每个单元的迭代过程分为两步, 都以最小二乘法为基础^[3].

第一步, 通过求解方程(15), 计算距离函数的梯度 $\nabla\phi^{n+1,v}$. v 是迭代次数, 为了简单起见, 上标 $n+1$ (表示 $n+1$ 时刻)在方程(15), (16)中被省略.

$$\sum_{j \in E_{par}(i)} \frac{1}{|\mathbf{m}_{ij}|^q} \begin{bmatrix} (\Delta x_{ij})^2 & \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} \\ \Delta y_{ij} \Delta x_{ij} & (\Delta y_{ij})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x^v \\ \phi_y^v \end{bmatrix} = \sum_{j \in E_{par}(i)} \frac{(\phi_j^{v-1} - \phi_i^{v-1})}{|\mathbf{m}_{ij}|^q} \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \end{bmatrix} \quad (15)$$

方程(15)中, 矢量 $\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i$ 表示两点之间的距离, $\Delta x_{ij} = x_j - x_i$, $\Delta y_{ij} = y_j - y_i$. q 是距离加权因子, 通常 $q \geq 0$, 本文取为 2. $E_{par}(i)$ 是单元 i 周围已经被重新初始化单元的集合. 在某

些特殊的情况下, 方程(15)左侧的矩阵变得奇异, 虽然这种情况很少, 但是也可能出现, 主要依赖于网格的拓扑结构. 在这种情况下, 可以适当增加一些相邻单元, 拓展集合 $E_{par}(i)$, 避免奇异矩阵的产生.

第二步, 采用第一步中计算出来的距离函数梯度, 通过求解方程(16), 计算距离函数 ϕ , 直到迭代收敛、满足距离函数条件为止.

$$\phi = \left[\sum_{j \in E_{par}(i)} \frac{1}{|\mathbf{m}_{ij}|^q} \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{j \in E_{par}(i)} \frac{1}{|\mathbf{m}_{ij}|^q} \frac{\nabla\phi_i^v \mathbf{m}_{ij}}{|\nabla\phi_i^v|} + \sum_{j \in E_{par}(i)} \frac{1}{|\mathbf{m}_{ij}|^q} \phi_j^v \right] \quad (16)$$

采用窄带方法求解 Level Set 方程的具体步骤如下:

(1) 设定窄带包含的网格层数阈值(界面每侧网格宽度为 6 到 12 个网格单元).

(2) 窄带内部的网格单元标记为活动单元(A live); 边界上的网格单元标记为边界单元(Land-Mine); 其余网格单元标记为无穷远单元(Far-Away), 若网格单元位于界面外部则距离函数值设为无穷大, 若网格单元位于界面内部则距离函数值设为无穷小.

(3) 在窄带的内部求解 Level Set 方程, 若界面到达窄带的边缘区域, 则构建新的窄带, 采用重新初始化方法求解新窄带单元的距离函数 ϕ .

(i) 找到与界面相交的单元, 称为活跃单元, 其他单元称为远场单元.

(ii) 在活跃单元集合内, 考虑 ϕ 值最小的单元 i 的相邻单元, 如果相邻单元为远场单元, 则将其添加到活跃单元集合, 并把其从远场单元移走.

(iii) 采用 FMM 方法, 求解方程(14), 重新计算相邻单元的 ϕ 值.

(iv) 冻结网格单元 i 上的 ϕ 值, 并把此单元从活跃区域移走. 此时 i 单元被认为已经进行了重新初始化, 称为初始化单元.

(v) 重复步骤(ii)~(iv), 直到没有活跃单元加入为止.

(4) 返回到步骤 2, 开始新的循环.

4 计算结果及分析

算例 1 SOD 激波管问题, 这是两种不同比热比介质的激波管问题. 这里考虑的是两种不同的理想气体. 计算的初始条件为

$$\begin{aligned} \rho &= 1.000, u = 0, p = 1.0, \gamma = 1.667, \\ P_c &= 0, 0 \leq x < 0.5 \\ \rho &= 0.125, u = 0, p = 0.1, \gamma = 1.2, \\ P_c &= 0, 0.5 < x \leq 1.0 \end{aligned}$$

计算域为 $(0, 0) \times (1.0, 0.2)$, 三角形网格单元的个数为 18176. 图 1 给出 $t=0.2$ 时刻, 密度、速度、压强沿激波管中心的分布, 并和精确解进行比较, 从图 1 中可以看出数值解与精确解吻合较好.

算例 2 空气/氦气泡相互作用问题

Mach 数为 1.22 的激波与氦气泡相遇, 波前和波后以及氦气泡内的初始状态值分别如下:

波后状态($x > 225$): $\rho = 1.3764, u = -0.394, v = 0, p = 1.5698, \gamma = 1.4, P_c = 0$

波前状态($x \leq 225$): $\rho = 1, u = 0, v = 0, p = 1, \gamma = 1.4, P_c = 0$

氦气泡内状态: $(x - 175)^2 + y^2 \leq 625$

$$\rho = 0.138, u = 0, v = 0, p = 1, \gamma = 1.667, P_c = 0$$

计算域为 $(0, -44.5) \times (325, 44.5)$, 三角形网格单元的个数为 65020, 图 2—3 分别给出 $t=50, 100, 150$ 时刻的密度等值线图, 从数值模拟的结果可以看出, 氦气泡在左行激波的作用下, 从右向左运动, 在刚开始时, 氦气泡的右端向内凹陷, 随着时间的推进, 氦气泡向内凹陷越来越明显, 形成了类似于喷嘴的形状. 本文计算结果和文献[4]的计算结果相吻合, 表明利用该方法进行可压缩介质流动数值模拟是可行的.

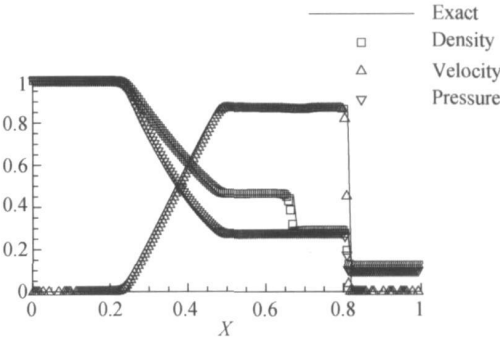


图 1 密度、速度、压强的数值解与精确解的比较

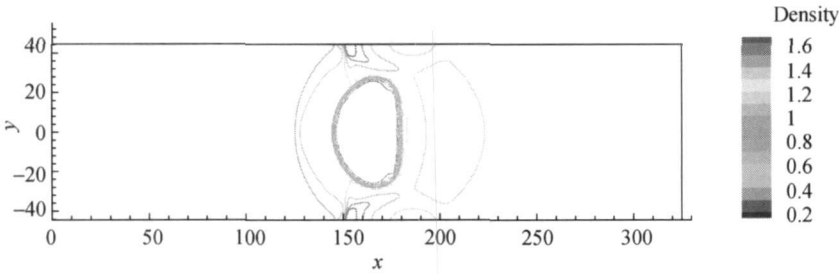


图 2 $t=50$ 时刻, 密度等值线图

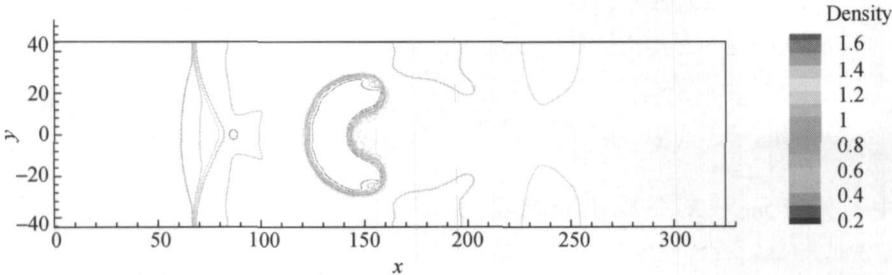


图 3 $t=100$ 时刻, 密度等值线图

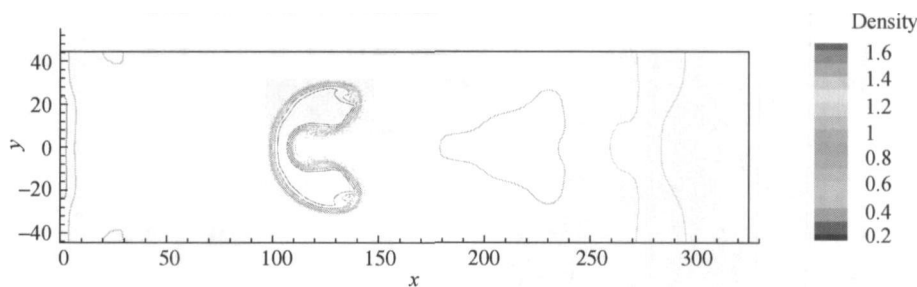


图 4 $t=150$ 时刻, 密度等值线图

5 结论

本文采用基于非结构网格的 Level Set 方法对多介质流动问题进行数值模拟. 采用有限体积法求解 Euler 方程和 Level Set 方程, 通过窄带(Narrow Band)方法来减少计算量, 重新初始化采用 Fast Marching Method, 界面的处理采用 Ghost Fluid 方法. 对典型的多介质流动问题进行数值模拟, 取得令人满意的结果, 验证了该方法的可行性.

参 考 文 献

- 1 Glimm J. Tracking of interfaces for fluid flow: Accurate methods for piecewise smooth problems, transonic shock, and multi-dimensional flows. In: Advances in Scientific Computing, Academic Press, Inc, 1982, 259—287
- 2 Osher S, Sethian JA. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. J Comput Phys 1988, (79): 12—49
- 3 Gloth D, Hanel L, Tian R Vilsmeier. A front tracking method on unstructured grids. Computers & Fluids, 2003, (32): 547—570
- 4 张学莹. 多介质流体运动界面高分辨率 Level Set 方法研究. 南京航空航天大学博士论文, 2006
- 5 Sethian JA. Level Set Methods and Fast Marching Methods Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science. Cambridge University Press, 1999, 77—101
- 6 Wang Z, Wang ZJ. The Level Set Method on Adaptive Cartesian Grid for Interface Capturing, AIAA, 2004—82
- 7 Chopp DL. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. J Comput Phys, 1993, 106(1): 77—91